DYNAMIC GEOMETRY SYSTEMS (DGS) – SOFTWARE SUPPORT FOR EDUCATION

Katarína ŽILKOVÁ

Abstract: The paper presents the characteristics of the most widely used software products with the common name "dynamic geometric systems" in Slovakia, which are designed to teach plane geometry in elementary and secondary schools, and colleges that prepare teachers of mathematics too. Attention is given to three programs: Cabri Geometry, Compass and Ruler and GeoGebra. The aim is to give some parameters in comparison of nominated programs that are crucial in selecting of the environment for a particular mathematical task and its implementation.

Key words: Animations, Cabri Geometry, Compass and Ruler, Dynamic, GeoGebra, Geometry, Interactivity, Constructions, Math Education

DYNAMICKÉ GEOMETRICKÉ SYSTÉMY (DGS) – SOFTVÉROVÁ PODPORA VZDELÁVANIA

Resumé: Príspevok poskytuje charakteristiku najpoužívanejších softvérových produktov so spoločným názvom „Dynamické geometrické systémy“ na Slovensku, ktoré sú zamerané na vyučovanie rovinnej geometrie na základných a stredných školách, ale aj fakultách pripravujúcich učiteľov matematiky. Pozornosť je venovaná trom programom: Cabri geometrii, programu Compass and Ruler a GeoGebre. Cieľom je uviesť komparáciu niektorých ukazovateľov v menovaných programoch, ktoré sú zásadné pri výbere daného prostredia pre konkrétnu matematickú úlohu a jej implementáciu.

Kľúčová slova: animácie, Cabri geometria, Compass and Ruler, dynamika, GeoGebra, geometria, interaktivita, konštrukcie, vyučovanie matematiky

1 Úvod alebo čo sú DGS?

Modernizácia vyučovacieho procesu v kontexte s integráciou prostriedkov IKT do vyučovania matematiky už prešla na Slovensku svojim mapovateľným vývojom. K veľmi významným softvérovým edukačným prostriedkom patria programy dynamickej geometrie zamerané na najmä na vizualizáciu geometrických pojmov a ich vzájomných vzťahov.

História vzniku prvých systémov dynamickej geometrie sa datuje okolo roku 1980, kedy bol vyvinutý Geometric Supposer. Jeho známejším nasledovníkom u nás boli Cabri geometria (1986) a The Geometer's Sketchpad. V súčasnosti sa na celosvetovom trhu vyskytuje pomerne veľa rôznych programov dynamickej geometrie, napr. Cabri II Plus, GeoGebra, Compass and Ruler, The Geometer's Sketchpad, EuklidDynaGeo, Eukleides, Geonext, Cinderella, Archimedes-Geo3D, Cabri3D, Euler3D, Geometria a množstvo ďalších. Pre uvedenú skupinu programov sa zaužívala skratka DGS (dynamické geometrické systémy), alebo DGEs (Dynamic Geometry

Environments – dynamické geometrické prostredia).

2 Čo majú spoločné DGS?

Väčšina vyššie uvedených systémov je porovnateľná a poskytuje v súčasnosti pomerne vysoký štandard z hľadiska ponuky (nielen) konštrukčných nástrojov pre užívateľa (učiteľa matematiky aj žiaka, resp. študenta).

Za základné spoločné atribúty pre všetky DGS môžeme považovať:

- **interaktivitu** – v závislosti od zmeny daných vstupných polohových a metrických atribútov systému dokážu reagovať zmenou všetkých zostrojených závislých útvarov (viac o interaktívnych učebných pomôckach v [2]);
- **dynamiku** – v súčinnosti s vlastnosťou interaktivity dokážu DGS znázorňovať pohyb, statické výkresy sa menia s použitím konštrukčných nástrojov určených na animované na dynamické konštrukcie;
- **vizualizáciu** alebo schopnosť znázorniť základné aj odvodené geometrické pojmy a vzťahy medzi nimi, pričom zostrojené

útvary môžu mať medzi sebou viacstupňovú závislosť (sú voľné, čiastočne viazané, alebo sú viazané, t. j. je medzi nimi silná závislosť);

- schopnosť realizovať **geometrické modelovanie** na virtuálnom výkrese prostredníctvom virtuálneho pravítka a kružidla so všetkými vyššie uvedenými vlastnosťami.

Ďalšie spoločné črty, ale aj odlišnosti dynamických geometrických systémov sú determinované rôznymi spôsobmi implementácie jednotlivých produktov. Pre učiteľa matematiky je náročné sledovať nové trendy vo vývoji jednotlivých edukačných softvérov, vedieť analyzovať ich prednosti ale aj nevýhody a následne vhodne zaradiť do vzdelávacieho programu.

Cieľom príspevku je predložiť krátku (nie kompletnú) komparáciu najpoužívanejších DGS na Slovensku so zameraním najmä na význačné prednosti systémov Cabri II Plus, GeoGebra a Compass and Ruler (C.a.R.).

3 Cabri II Plus, GeoGebra, C.a.R. a ich primárne ciele

Uvedené tri geometrické systémy vznikli na akademickej pôde a boli vyvíjané najmä pre vzdelávacie účely. Ich primárnym zameraním je vizualizácia a riešenie geometrických úloh na virtuálnom výkrese prostredníctvom implementovaných konštrukčných nástrojov. Systémy poskytujú experimentálne prostredie na objavovanie, skúmanie, resp. overovanie hypotéz. Cabri IIPlus, GeoGebra aj Compass and Ruler obsahujú v základnej ponuke bežné nástroje potrebné na tvorbu geometrických konštrukcií, počnúc od nástrojov na zobrazenie bodu, priamky, polpriamky, úsečky, kružnice, kolmice, rovnobežky cez nástroje umožňujúce realizovať rovinné izometrie až po možnosti zobrazovania množín bodov s danou vlastnosťou, či dynamizovať statické virtuálne výkresy prostredníctvom nástrojov určených na jednoduché animácie. Nie menej závažnou informáciou v našich podmienkach je, že uvedené tri systémy dynamickej geometrie sú lokalizované, a teda odpadá jazyková bariéra pre niektorých našich učiteľov matematiky a taktiež ich žiakov.

Každý z uvedených systémov má však svoje špecifiká, ktoré ho pred inými konkurentmi v istých prípadoch zvyhodňujú, ale inokedy zasa môžu byť pre užívateľa príťažou. Poznať uvedené rozdielnosti môže znamenať pre učiteľa

matematiky, resp. pre jeho žiakov dobrú štartovaciu pozíciu, najmä v rozhodovaní sa, v ktorom z DGS sa bude daný matematicko-geometrický problém implementovať.

3.1 Cabri II Plus

K udomácneniu Cabri Geometrie v prostredí slovenských vzdelávacích inštitúcií prišlo najmä vďaka národnému projektu Infovek, a preto sa doposiaľ na základných a stredných školách vyskytujú momentálne už zväčša staršie verzie programu. Vzhľadom na skutočnosť, že Cabri geometria je komerčný produkt, za **licencie** je potrebné vynaložiť **nemalé finančné prostriedky**.

Na rozdiel od starších verzií Cabri geometrie je potrebné konštatovať, že Cabri IIPlus má korektne implementovaný nástroj na vyhľadávanie a aktualizovanie priesečníkov dvoch útvarov, pričom užívateľ dokáže prostredníctvom jedného kroku definovať všetky reálne a tiež potenciálne **priesečníky**. Napríklad po zostrojení dvoch štvorcov a voľbe priesečník Cabri vyznačí všetky priesečníky (obr. 1) a po zmene polohových vlastností sa zobrazia všetky existujúce priesečníky. V niektorých špeciálnych prípadoch je potrebné existenciu priesečníkov overiť a dodatočne manuálne vyznačiť, ale uvedená vlastnosť v podstatnej miere uľahčuje implementáciu najmä zložitejších konštrukcií.

Obr. 1: Definovanie priesečníkov v Cabri geometrii.

Druhým benefitom Cabri geometrie je schopnosť realizovať nielen jednoduchú, ale aj **paralelnú animáciu**, pričom možno animovať viacero útvarov simultánne. Animácia sa definuje natiahnutím pružiny, ktorá určuje smer a rýchlosť animácie.

Obr. 2: Paralelná animácia v Cabri II Plus.

3.2 Compass and Ruler (C.a.R.)

Dynamickú geometriu s názvom Compass and Ruler možno získať bezplatne a inštalácia je tiež bezproblémová [21]. Za najväčší benefit C.a.R. možno považovať schopnosť definovať „matematické cvičenia“ (assignments). Konštrukčné cvičenia, resp. zadania sú úlohy určené na vyriešenie, pričom systém dokáže verifikovať správnosť nielen hľadaného útvaru, ale aj jednotlivé kroky konštrukcie, čím možno overovať aj metódu riešenia geometrickej úlohy. Podrobnejšie sa môže čitateľ o matematických zadaniach v C.a.R. dozvedieť z prác [12, 13, 19, 20] a niektoré ukážky s možnosťou vyskúšať si riešenie úlohy sú zverejnené na stránkach [13, 18].

Obr. 3: Interaktívne cvičenie implementované a vyriešené v C.a.R. so spätnou väzbou.

Compass and Ruler dokáže realizovať jednoduchú animáciu, avšak implementované je „len“ **animovanie bodov**. Na rozdiel od jeho ďalších dvoch konkurentov, systém si poradí aj s animovaním bodov pozdĺž viacerých úsečiek alebo kružníc. Vtedy je potrebné zrušiť viazanosť bodu na útvar, na ktorom bol bod zostrojený. Vďaka kombinácii možností nastavenia **bodov**

prerušená v prehrávaní postupu konštrukcie a animovania, dokáže učiteľ pripraviť zaujímavé edukačné materiály (obr. 4, pozri [18])

Obr. 4: Interaktívna animácia implementovaná v C.a.R.

Vzhľadom na skutočnosť, že softvér je založený na platforme Java, export na webové stránky je jednoduchý a pohodlný. Navyše umožňuje nastavenie doplnkových parametrov, akými sú nielen vizuálna stránka exportu, ale za mimoriadnu prednosť možno považovať slobodu vo voľbe, ktoré konštrukčné nástroje budú pre riešiteľa alebo užívateľa k dispozícii.

Problémové situácie pre užívateľa môžu nastať v oblasti definovania priesečníkov geometrických útvarov. C.a.R. nemá implementovaný nástroj na vyznačenie priesečníkov iných útvarov ako úsečiek. Preto v konštrukčných úlohách, pri riešení ktorých je potrebné vyznačiť **priesečníky zložitejších geometrických útvarov**, je potrebné hranicu daného útvaru chápať ako zjednotenie úsečiek príslušnej lomenej čiary a definovať priesečníky vždy len ako priesečníky dvojíc úsečiek. Z hľadiska obsahu matematického učiva najmä na základných a stredných školách by tiež v ponuke konštrukčných nástrojov mohol v budúcnosti pribudnúť nástroj umožňujúci zobrazenie pravidelných n-uholníkov.

Napriek v predchádzajúcom odseku uvedeným malým nedostatkom možno konštatovať, že C.a.R. je vydareným softvérovým produktom určeným pre matematické vzdelávanie.

3.3 GeoGebra

Program s názvom GeoGebra možno zaradiť nielen do skupiny dynamických geometrických systémov, ale snahou autorského kolektívu je aj prepojenie algebraických a tiež aritmetických vstupov s ich vizualizáciou. Preto možno uvažovať aj o zaradení systému do kategórie CAS (Computer Algebra Systems). GeoGebra okrem tohto nadštandardu má aj svoju

trojdimenzionálnu verziu (podobne ako Cabri) na riešenie úloh zo stereometrie. Pre potreby nášho príspevku sa však budeme venovať porovnateľným ukazovateľom ako v predchádzajúcich dvoch hodnotených programoch.

V porovnaní s Cabri geometriou a C.a.R. má GeoGebra neuveriteľne rýchle tempo vývoja, neustále aktualizácie zabezpečujú nielen vznik nových konštrukčných nástrojov, ale aj odstraňovanie prípadných nedostatkov. Na popularite získava GeoGebra nielen svojou voľnou dostupnosťou, ale najmä prostredníctvom novovznikajúcich národných inštitútov, sprístupňovaním nových učebných materiálov, organizovaním vlastných konferencií a workshopov. O všetkých popularizačných aktivitách a tiež oceneniach sa čitateľ môže dozvedieť z domovskej stránky [22].

Problém priesečníkov, ktorý bol opísaný v časti o programe C.a.R. je analogický aj pre GeoGebra a redukuje sa na vyznačenie len priesečníkov dvoch úsečiek alebo priamok, resp. kružníc. Pri hľadaní priesečníkov dvoch mnohoúhelníkov je potrebné použiť dôvtip a vyznačiť príslušné dvojice úsečiek, na ktorých by mohli vzniknúť potenciálne priesečníky.

Animácie sa v GeoGebre realizujú výhradne prostredníctvom posuvníka, ktorý nadobúda číselnú hodnotu užívateľom stanoveného rozsahu (intervalu) alebo variabilnú hodnotu veľkosti uhla. Vytvoriť jednoduché animácie nie je problém, dokonca možno animovať viacero posuvníkov súčasne. Ak by sme ale potrebovali animovať napríklad obraz bodu pozdĺž hranice trojuholníka, riešenie je podstatne zložitejšie ako v systéme C.a.R. Treba použiť menšie programátorské techniky, ktoré od bežného učiteľa matematiky nemožno očakávať. Riešenie je založené na princípe, že treba analytickým spôsobom definovať postupne až tri body závislé na hodnote posuvníka definovaného na intervale $\langle 1, 3 \rangle$, ktoré ležia každý práve na jednej z úsečiek tvoriacich hranicu trojuholníka. Tieto body budú v konečnom dôsledku neviditeľné a zobrazený bude štvrtý bod G (obr. 5). Bod G sa pohybuje v závislosti od hodnoty posuvníka a troch bodov D, E, F skonštruovaných na hraničných úsečkách trojuholníka. Jeho definícia je: $Ak[d < 1, D, Ak[d < 2, E, F]]$. To znamená, že ak má posuvník hodnotu menšiu ako jedna, bude sa na úsečke AB pohybovať v skutočnosti bod D, ak bude posuvník nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle 1, 2 \rangle$, tak sa bude pohybovať bod E a ak bude

hodnota posuvníka z intervalu $(2, 3 \rangle$, bude sa na úsečke AC pohybovať bod F.

Obr. 5: Spôsob animovania bodu po hranici trojuholníka v systéme GeoGebra.

Napriek komplikovanosti uvedeného riešenia je potrebné vyzdvihnúť **možnosť nastavenia podmienky na zobrazenie objektu** pre jednotlivé útvary vo všeobecnosti. Táto schopnosť umožňuje tvorbu výnimočných edukačných materiálov, ktoré reagujú na zmenené vstupné podmienky dynamickým vyhodnotením zobrazeného stavu.

4 Záver

Učiteľovi matematiky nie je možné poskytnúť jednoznačné odporúčanie niektorého z vymenovaných DGS. Všetky tri ponúkajú základný štandard potrebný k riešeniu (nielen) geometrických matematických úloh. Je však užitočné mať základnú informáciu o jednotlivých produktoch a orientovať sa v prípadných odlišnostiach dôležitých pri príprave edukačných materiálov. Malé rozdielnosti môžu totiž niekedy zásadným spôsobom ovplyvniť efektivitu pri tvorbe a využívaní DGS vo vyučovaní matematiky.

5 Literatúra

- [1] ARNOLD, S. *Dynamic integration of CAS and DGS: what does this mean?* In: Conference Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education. Abstract, 2009, p. 5. [<http://www.risc.uni-linz.ac.at/about/conferences/cadgme2009/CADGME-2009-Abstracts.pdf>]
- [2] DOSTÁL, J. Multimediální, hypertextové a hypermediální učební pomůcky – trend soudobého vzdělávání. In: *Journal of Technology and Information Education*. 2009, Olomouc – EU, Palacký University, Vo JTIE - 2009 -

Volume 1; Issue 2, p. 33-39. ISSN 1803-537X (print). ISSN 1803-6805 (on-line).

[3] FEST, A.: Creating interactive User Feedback in DGS using the Scripting Interface of Cinderella. Conference Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education. Abstract, 2009, p. 7/8.

[<http://www.risc.uni-linz.ac.at/about/conferences/cadgme2009/CADGME-2009-Abstracts.pdf>]

[4] HANZEL, P.: Elektronické dynamické systémy aplikované v euklidovskej rovine. In: *DIDZA 2009*. Žilina: FPV ŽU, 2009, p. 19-28. ISBN 978-80-554-0049-5.

[5] HANZEL, P. – MAJOVSKÁ, R. Perspektívne smery vo vyučovaní dynamickej geometrie. In: *Matematika z pohľadu primárneho vzdelávania = Mathematics from Primary Education*. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, 2009. 250 s. ISBN 978-80-8083-742-6. s. 63-69.

[6] HÍC, P. – POKORNÝ, M. E-learning vo vyučovaní matematiky. In: *Acta Mathematica* 8. Nitra: Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, p. 113-118, 2005. ISBN 80-8050-896-8.

[7] HOHENWARTER, M. – JARVIS, D. – LAVICZA, ZS. Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute. In: *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. Plymouth: The University of Plymouth, 2009, Volume 16, Number 2, p. 83-87. ISSN 1744-2710.

[8] HOHENWARTER, M. – FUCHS, K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Dostupné na http://www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf

[9] KORTENKAMP, U. Intergeo - Interoperable Interactive Geometry for Europe. Working Group in the Frame of CADGME 2009. [<http://www.risc.uni-linz.ac.at/about/conferences/cadgme2009/CADGME-2009-Abstracts.pdf>]

[10] LUKÁČ, S. a kol. *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete MATEMATIKA pre stredné školy*. Košice: pre UIPŠ elfa, s.r.o. 295 s. ISBN 978-80-8086-149-0

[11] LUKÁČ, S. – ENGEL, R. Aktivne osvojovanie matematických poznatkov pomocou interaktívnych učebných materiálov. In: *Matematika-Fyzika-Informatika*. Praha:

Prometheus, 2009. p. 488-498. ISSN – 1210-1761.

[12] MARCINEK, T. So you think you can find the midpoint? In: *Proceedings of the conference „Mathematics from Primery Education View“*. Banská Bystrica: UMB 2009, p. 130-134. ISBN 978-80-8083-742-6.

[13] MARCINEK, T. *Simple Constructions and Explorations in Java*. Dostupné na <http://www.marcinek.sk/cmich/java/index.html>

[14] PARTOVÁ, E.: Elektronická učebnica didaktiky elementárnej matematiky. 2009. [<http://www.delmat.fedu.uniba.sk/>]

[15] SEMANIŠINOVÁ, I. a kol. *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete MATEMATIKA pre základné školy*. Košice: pre UIPŠ elfa, s.r.o. 313 s. ISBN 978-80-8086-158-2

[16] VALLO, D. – ZÁHORSKÁ, J. Geometrické programy – prehľad a porovnanie. In: *Nové trendy v univerzitnom matematickom vzdelávaní*. Nitra: FEM SPU, 2009, p. 151-156. ISBN 978-80-552-0197-9.

[17] VANÍČEK, J.: *Počítačové kongnitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

[18] ŽILKOVÁ, K. *WebMatika.sk* (Školská matematika v prostredí IKT). Dostupné na <http://www.webmatika.sk>

[19] ŽILKOVÁ, K. C.a.R. zadania – metóda internetových konštrukčných úloh (cvičení). In: *DIDZA 5 – zborník príspevkov z 5. žilinskej didaktickej konferencie*. Žilina: FPV ŽU, 2008. ISBN 978-80-8070-863-4

[20] ŽILKOVÁ, K.: Virtuálne pravítko a kružidlo na webových stránkach. In: *Acta Mathematica XI*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2008, str. 255-59. ISBN 978-80-8094-396-7

[21] <http://zirkel.sourceforge.net/>

[22] <http://www.geogebra.org/cms/>

[23] <http://www.cabri.com/>

[24] www.webmatika.sk

PaedDr. Katarína Žilková, PhD.
Katedra predškolskej a elementárnej pedagogiky
Pedagogická fakulta UK v Bratislave
Račianska 59
813 34, Bratislava, SR
Tel: +421-2-50222 152
E-mail: katarina@zilka.sk,
Www pracoviště: www.fedu.uniba.sk