

METHOD OF VIRTUAL SPATIAL MANIPULATION IN TEACHING OF MATEMATICS

Katarína ŽILKOVÁ

Abstract: Teaching of mathematics in the context of information and communication technologies requires not only the innovation of traditional teaching methods, but also spurred the creation of new teaching practices. The contribution clarifies the principle of virtual spatial manipulation, as an important teaching method aimed at promoting development of spatial imagination. An overview of mathematics and geometry software suitable for solving of spatial problems gives their short characteristics together with suggestions for use. Usefulness of the use of virtual methods of spatial manipulation is illustrated by solving a simple spatial problem in the Cabri 3D environment.

Key words: dynamics, geometry, interactivity, manipulation, spatial situation, geometry, virtual manipulation.

METÓDA VIRTUÁLNEJ PRIESTOROVEJ MANIPULÁCIE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Abstrakt: Vyučovanie matematiky v prostredí informačných a komunikačných technológií si vyžaduje nielen inováciu tradičných vyučovacích metód, ale podnietilo aj vznik nových didaktických postupov. Príspevok objasňuje princíp virtuálnej priestorovej manipulácie, ako dôležitej didaktickej metódy zameranej na podporu rozvoja priestorovej predstavivosti. V prehľade vhodných matematicko-geometrických programových produktov určených na riešenie stereometrických úloh je uvedená ich krátka charakteristika spolu s námetmi na využitie. Užitočnosť využitia metódy priestorovej virtuálnej manipulácie je ilustrovaná na riešení jednoduchšej stereometrickej úlohy v prostredí Cabri 3D.

Kľúčové slová: dynamika, geometria, interaktivita, manipulácia, priestorová situácia, stereometria, virtuálna manipulácia.

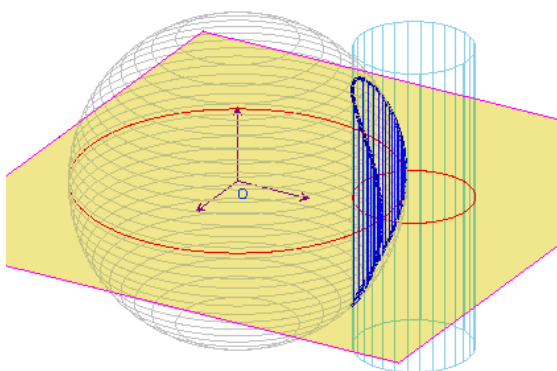
Úvod

O užitočnosti manipulačných aktivít vo vyučovaní matematiky pojednávajú vo svojich prácach viacerí autori. Najmä v oblasti rozvíjania predstáv o priestorových telesách sú cieľavedomé manipulácie s trojrozmernými objektmi dôležitou súčasťou optimalizácie didaktických postupov. Napriek skutočnosti, že o dôležitosti rozvoja geometrických poznatkov nikto nepochybuje, z výsledkov rôznych prieskumov vyplýva, že v uvedenej oblasti výučby sú značné rezervy a nedostatky. K základným cieľom vyučovania školskej stereometrie podľa viacerých autorov patrí schopnosť:

- zachytiť priestorovú situáciu v rovinnom obrázku,
- vidieť rovinný obrázok priestorovo,
- vedieť zobrazit' základné typy telies, ich rovinné rezy a siete.

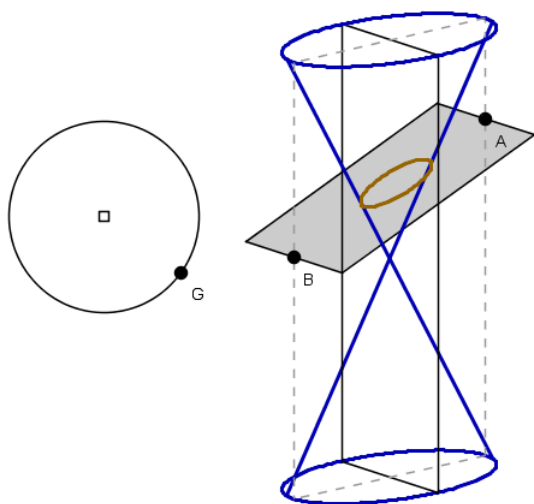
Dôležitou súčasťou stereometrického vzdelania je naučiť žiakov manipulovať s priestorovými objektmi v myšlienkach a predstavách. Podobne, ako keď sa dieťa učí základným manipuláciám s rôznymi detskými stavebnicami a prechádza pri tejto činnosti rôznymi stupňami poznania, je potrebné postupne budovať a rozvíjať aj základné poznatky o stereometrii v širšom zmysle slova. Na ceste od manipulácie s telesami až po korektnú abstraktnú predstavu o nich je potrebné postupne zaraďovať rôznorodé úlohy a cvičenia, aby skúseností s priestorovými javmi bolo čo najviac.

Jedna z didaktických metód, ktorá nadväzuje na manipuláciu s modelmi telies a účinne podporuje rozvoj priestorovej predstavivosti je „**virtuálna manipulácia**“ s trojrozmernými objektmi v prostredí počítačových programových produktov.



Obr. 1: Reprezentácia gule, valca a ich spoločného prieniku v Cabri II Plus.

Poznávanie niektorých vlastností priestorových telies napr. na monitore počítača, prípadne na interaktívnej tabuli, je užitočné najmä z pohľadu častých problémov vyplývajúcich z nedostatočnej geometrickej gramotnosti žiaka v oblasti zobrazenia trojrozmerných objektov do rovinného obrazu. Schopnosť vidieť zobrazované telesá trojrozmerné je v špeciálnych elektronických výučbových prostrediach podporená vďaka vizualizačným možnostiam výpočtovej a zobrazovacej techniky.



Obr. 2: 3D konštrukcia rezu na rotačnej kužeľovej ploche v systéme C.a.R.
http://mathsrv.kueichstaett.de/MGF/homes/grotzman/java/zirkel/doc_en/Demos/index.html.

V súčasnosti možno pri vyučovaní stereometrie využiť, okrem už spomínaných prostredí dynamickej geometrie Cabri II Plus (obr. 1) a Compass and Ruler (obr. 2), aj rôzne špecializované programy určené na výučbu niektorých častí stereometrického učiva. Z hľadiska načrtnutej problematiky sa javí ako výnimočne vhodný všeobecnejší dynamický softvér určený na riešenie úloh priestorovej geometrie s názvom Cabri 3D, prípadne užšie špecializovaný programový produkt s názvom **Poly Pro** (obr. 3). Pre konkrétnejšiu predstavu o potenciáli spomínaných programov a o ich didaktickom využití sa pokúsime obidva produkty v krátkosti charakterizovať, najmä v kontexte ich využitia vo vyučovaní matematických tém o geometrických telesách.

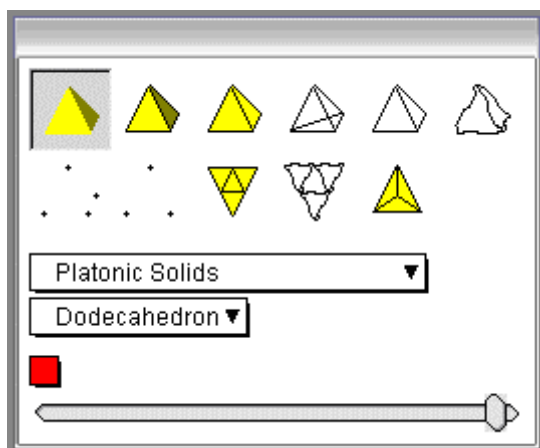
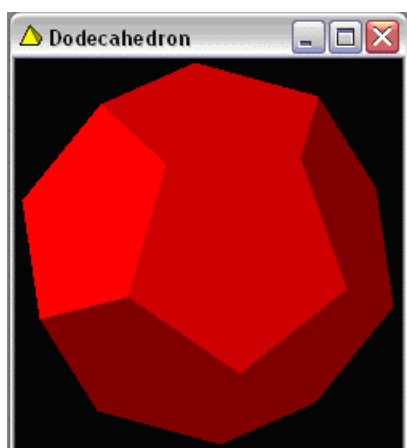
Poly Pro – virtuálne skúmanie mnohostenov a ich vlastností

Softvér s názvom *Poly Pro* (obr. 3, obr. 4) je príkladom špecializovaného, pomerne vydareného, programového produktu určeného na *skúmanie vlastností špeciálnych typov mnohostenov*. Je dostupný na www.peda.com a patrí do kategórie tzv. shareware, čo umožňuje bezplatné vyskúšanie, časovo a najmä rozsahovo obmedzené používanie. Softvér umožňuje užívateľovi sledovať rôzne pohľady na zvolené špeciálne telesá v názornom zobrazení. V ponuke programu sú zobrazenia týchto typov telies: Platónove telesá, Archimedove telesá, hranoly a antihranoly, Johnsonove telesá, deltaédry, Katalánske telesá, dipyramídy a geodetické guľovité kupoly. O možnostiach programu a jeho didaktickom využití vo vyučovaní matematiky podrobne informuje O. Židek (2007), ktorý hodnotí program z viacerých hľadísk. V stručnosti preberáme: „Telesá sa môžu skúmať z hľadiska konvexity, a taktiež z hľadiska počtu vrcholov, stien a hrán. Z hľadiska obsahovej didaktiky je program zaujímavý z pohľadu klasifikácie a triedenia telies. Napokon treba zdôrazniť, že vnímanie pohľadov na telesá prostredníctvom monitoru je, na rozdiel od vnímania konkrétnych modelov telies, ďalším stupňom rozvoja abstrakcie“ (O. Židek, str. 208, 2007). K výhodám prípravy úloh a zadaní v prostredí programu Poly Pro autor príspevku zaraďuje nasledujúce vlastnosti:

- „animácia zobrazení telies umožňuje flexibilitu v individuálnom zadaní ďalších úloh pre jednotlivých žiakov (napr. pri

zobrazovaní duálnych telies k daným telesám);

- finálne grafické produkty sú spravidla veľmi estetické, čo riešiteľa vedomostne uspokojuje a povzbudzuje;
- riešenie vyžaduje *minimálnu znalosť teórie* z voľného rovnobežného premietania (využívajú sa invarianty: incidencia, rovnobežnosť a podielový pomer);
- dá sa pohodlne zoznámiť so *špeciálnymi skupinami telies*, ktoré sa v tradičnej školskej matematike nevyskytovali pre náročnosť ich zobrazení.



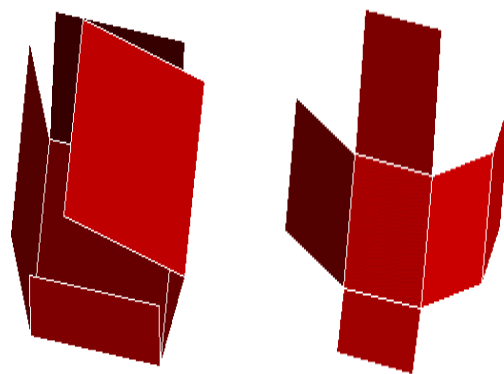
Obr. 3: Poly Pro, verzia 1.11, dostupné na www.peda.com.

Blížšia zmienka o programe a jeho ponuke nie je potrebná, pretože je zrozumiteľný, ľahko ovládateľný, a aj ľahko dostupný. Cenné sú však informácie o skúsenostiach z využívania a námetoch aktivít, ktoré sa dajú využiť ako geometrické cvičenia:

1. „Rozhodni o viditeľnosti hrán jednotlivých telies (to program niekedy

neurobí). Zvolenú viditeľnosť je možné zvýrazniť vyfarbením stien.

2. Z predtlače vrcholov telesa zostroj zobrazenie jeho hrán (stien) vrátane zvolenej viditeľnosti.
3. V predtlačí zobrazenia „viditeľných“ hrán telesa narysuj (čiarkovane) „neviditeľné“ hrany (steny).
4. V predtlačí neúplného znázornenia vrcholov (hrán) narysuj ďalšie, s využitím poznatkov o rovnobežnom premietaní.
5. Rysuj do predtlače znázorneného telesa ďalšie objekty“ (O. Židek, str. 208, 2007).



Obr. 4: Vizualizácia tvorby siete kocky v programe Poly Pro, sledovanie prechodu z roviny do priestoru a naopak, príprava metodického materiálu.

Z ďalších didaktických benefitov vyberáme:

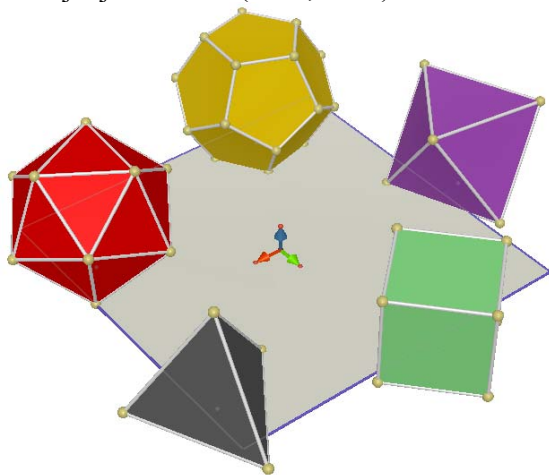
- Objavným spôsobom možno prezentovať princíp duality medzi telesami (kocka – osemsten, dvanásťsten – dvadsaťsten, atď.). K riešeniu postačí schopnosť nájsť stred steny telesa a tento považovať za vrchol nového telesa. Zatiaľ čo cvičenie na kocke je z konštrukčného hľadiska jednoduché, cvičenie na ďalších telesách by bolo bez ponúkanej technológie veľmi náročné.
- Pri skúmaní poloprávnych mnohostenov (Archimedovské telesá) možno využiť princíp „obsekávania“ vrcholov na pravidelných mnohostenoch (Platónových telesách).

- Pomerne ľahko sa dajú kombinovaným spôsobom zobrazit' niektoré hviezdicovité telesá (stella octangula) i ďalšie.

Z technického hľadiska je zaujímavá skutočnosť, že je možné exportovať otáčajúce sa mnohosteny v tvare animovaných súborov typu *.gif.

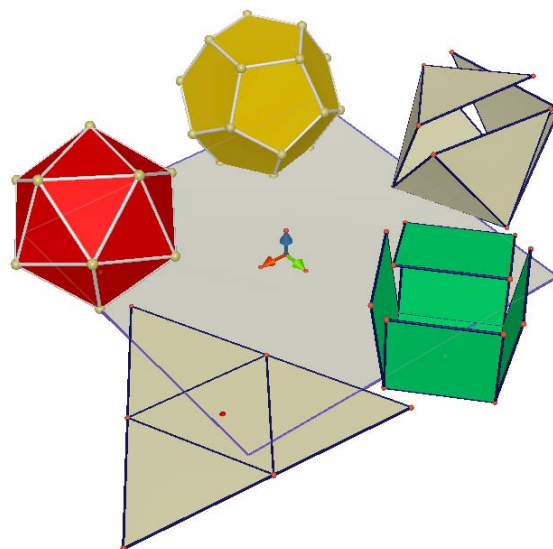
Cabri 3D – platforma na riešenie stereometrických úloh

Všeobecnejším programom určeným na riešenie stereometrických úloh v Euklidovskom priestore E^3 je Cabri 3D vyvíjaná tímom Cabrilog. Podobne, ako program Cabri II Plus, možno charakterizovať aj jeho priestorový variant ako interaktívny geometrický dynamický systém, ktorý ponúka nástroje na riešenie geometrických úloh v priestore. O jeho základných vlastnostiach sa čitateľ môže dozvedieť z domovskej internetovej stránky (www.cabri.com), ďalej z vedeckých a recenzných prác J. Vaníčka (2005) a didaktické skúsenosti na Slovensku postupne zverejňuje D. Vallo (2005, 2007).



Obr. 5: Platónske telesá v Cabri 3D.

Avšak aj bez hlbšieho štúdia spomínaných prác možno konštatovať, že už prvé tri prívlastky uvedeného softvéru: interaktívny, geometrický a dynamický program konkretizujú a vypovedajú o jeho atribútoch. Prostredie programu Cabri 3D je intuitívne a ponuka konštrukčných nástrojov nie je veľká. Napriek tomu funkcionálnosť programu je dostatočná pre potreby školskej geometrie nielen z obsahovej stránky, ale najmä z hľadiska inovačných didaktických prístupov. Ak by sme chceli podrobiť ponuku



Obr. 6: Postupné „otváranie“ telies až do siete v Cabri 3D.

a vlastností Cabri 3D náročným klasifikačným kritériám, ktoré majú charakterizovať celé stereometrické učivo z obsahovej stránky, treba konštatovať, že v programe nájdeme nástroje na:

- *Rozvoj priestorovej predstavivosti.*
 - jednoduché konštrukcie zobrazení telies (štvorsten, kváder, hranol, ihlan, konvexný mnohosten, vrátane platónskych telies – obr. 5)
 - tvorba sietí uvedených telies (obr. 6)
 - tvorba interaktívnych rezov telies
 - možnosť zobrazenia dynamickej manipulácie s telesami (skúmanie z rôznych zorných uhlov, odďaľovanie a rozbaľovanie telies, otáčanie),
- *Využívanie kalkulatívnej stereometrie.*
 - možnosť merania vzdialeností, dĺžok, obvodov, obsahov, objemov a povrchov, veľkostí uhlov, zavedenie súradnicového systému, využívanie rovníc pri riešení stereometrických úloh,
- *Prehĺbenie vedomostí z teoretickej stereometrie.*
 - nástroje na využívanie priestorových transformácií (stredová súmernosť, osová súmernosť, rovinová súmernosť, posunutie, otočenie, rovnol'ahlosť, inverzia).

So zostrojenými priestorovými útvarmi v Cabri 3D možno manipulovať, prispôbovať ich vzhľad, animovať ich a zanechávať stopu zvolených pohybujúcich sa objektov. K tradičným nástrojom dynamických geometrií patrí možnosť prehrávania konštrukcie krok po

kroku. K najdôležitejším prednostiam môžeme zaradiť jednoduchý webový export, čím sa otvárajú možnosti prípravy on-line výučbových materiálov a dynamických obrázkov využiteľných v rôznych elektronických didaktických dokumentoch.

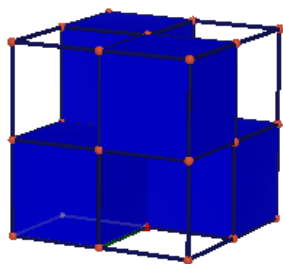
V priamej výučbe systém môže slúžiť ako:

- *nástroj virtuálneho rysovania* (virtuálny výkres, virtuálne pravítko a kružidlo),
- *nástroj na prezeranie hotových konštrukcií*, ich skúmanie, experimentovanie s nimi vrátane ďalších manipulácií,
- *demonštračný nástroj* (doplnok výkladu, zobrazovacia pomôcka napr. pre diskusiu),
- *nástroj na rozvíjanie priestorovej predstavivosti* a jej overovanie.

Jednu z alternatív didaktického využitia softvéru Cabri 3D uvedieme pri riešení nasledujúcej úlohy.

Úloha o nepriehľadnej kocke

Miško si z dovolenky priniesol špeciálnu kocku zlepenú z ôsmich kociek – štyri sú biele priehľadné a štyri čierne nepriehľadné. Kocky sú uložené tak, aby sa cez kocku nedalo vidieť ani zhora dole, ani spredu dozadu, ani zľava doprava (obr. 7). Fero si chce urobiť tiež takú nepriehľadnú kocku, ale väčšiu – z 27 kociek. V obchode zistil, že za jednu čiernu nepriehľadnú kocku zaplatí až 20 korún, zatiaľ čo za bielu priehľadnú len 8 korún. Najmenej koľko korún ho bude stáť veľká kocka, ak za lepidlo zaplatí 40 korún?



Obr. 7: Ilustračný obrázek.

Autorské riešenie:

„Keďže Fero chce za veľkú kocku zaplatiť čo najmenej korún, musí kúpiť čo najmenej nepriehľadných čiernych kociek, lebo sú drahšie ako priehľadné biele. Najprv zistíme, najmenej koľko čiernych kociek musí kúpiť a ako ich musí umiestniť, aby celá veľká kocka bola nepriehľadná. Veľká kocka má byť z 27 kociek, preto bude mať rozmery 3x3x3. Aby nebolo vidieť spredu dozadu, musia byť na

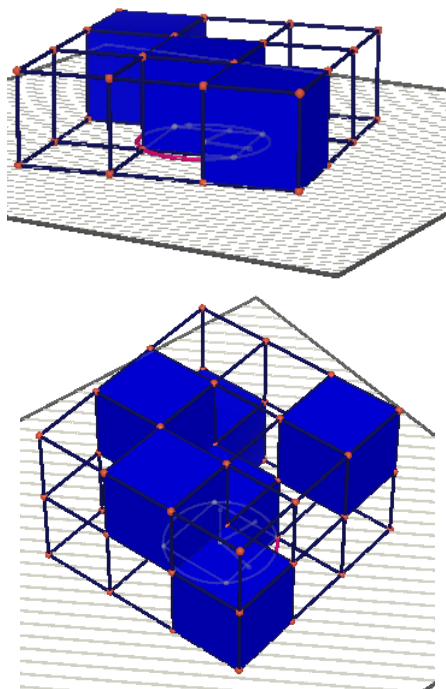
každom poschodí najmenej 3 kocky (v každom „predozadnom“ rade po jednej). Tieto by mali byť umiestnené tak, aby súčasne zabráňovali pohľadu zhora dole (teda aby v každom z deviatich stĺpcov bola jedna kocka) a súčasne aby zabráňovali pohľadu zľava doprava. Fero musí kúpiť 9 čiernych nepriehľadných kociek, za ktoré zaplatí $9 \cdot 20 = 180$ korún. Zvyšných $27 - 9 = 18$ kociek bude bielych priehľadných a zaplatí za ne $18 \cdot 8 = 144$ korún. Spolu s lepidlom za 40 korún zaplatí Fero $180 + 144 + 40 = 364$ korún. *Veľká kocka ho bude stáť najmenej 364 korún.*”

Komentár:

Otázka v uvedenej úlohe je formulovaná tak, že predznamenáva jednoduchý numerický výpočet, ktorý však netvorí jadro problému. Úloha sa charakterovo redukuje na stereometrickú, a len jej úspešné riešenie môže byť základom zdarného ukončenia riešenia úlohy. Hľadá sa odpoveď na otázku: *Zistite najmenej koľko čiernych - nepriehľadných kociek potrebujeme a ako ich rozmiestnime, aby celá veľká kocka bola nepriehľadná.*

V zadaní úlohy je dieťaťu predložený ilustračný obrázok kocky, ktorú si priniesol z dovolenky Miško. Úloha je teda určená pre žiakov, u ktorých sa predpokladá schopnosť korektnej interpretácie ilustračného obrázka, prípadne textovej formulácie úlohy. Pre riešiteľa by nemal byť problém veľkú kocku s rozmermi 2x2x2 poskladať z poskytnutých kociek dvoch farieb. Je zjavné, že poskladať kocku tak, aby sme overili jej priehľadnosť, či nepriehľadnosť z pohľadov zhora dole, spredu dozadu a aj zľava doprava je problematické vzhľadom na výber materiálu priehľadných kociek. Ak by sme priehľadné kocky ignorovali a skúsili použiť len čierne, stavba nie je kompaktná, a teda sa nedá poskladať. Takže už aj vo fáze interpretácie úlohy musí byť žiak schopný istej abstrakcie, či je to v práci s konkrétnym dvojfarebným modelom, alebo v myšlienkovvej manipulácii s kockou s rozmermi 2x2x2. Po zväčšení kocky na 3x3x3 sa význam použitia konkrétnych kociek v dvoch farebných prevedeniach prinajmenšom znižuje, pretože predstava jednotlivých horizontálnych a vertikálnych vrstiev veľkej kocky z hľadiska ich priehľadnosti je náročná, nie však vylúčená. Pre žiakov, u ktorých abstrakčná úroveň ešte nedosiahla manipuláciu v myšlienkach, môže byť využitie vhodného softvéru prospešným nástrojom na

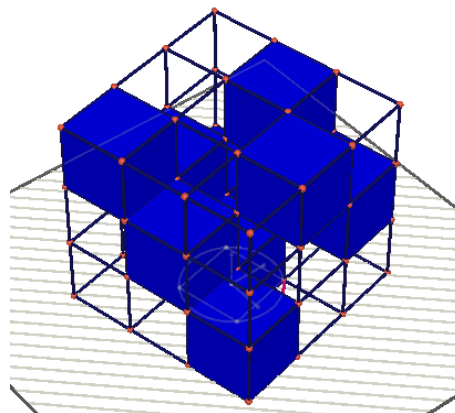
spredmetnenie. Platforma Cabri 3D sa ponúka nielen v demonštračnej rovine (učiteľ pripraví modely v prostredí Cabri 3D a predvedie dynamické zmeny v závislosti od zmeny zorného uhla pohľadu), ale najmä v možnosti individuálneho skladania kocky samotným riešiteľom postupným pridávaním menších kociek.



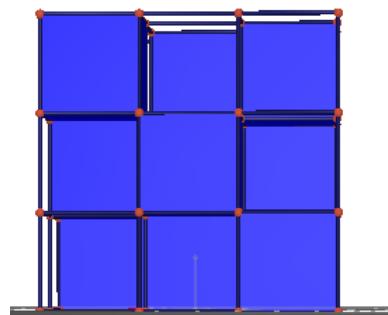
Obr. 8: Skladanie veľkej kocky postupne po horizontálnych vrstvách s nastavovaním priehľadnosti.

Keďže dynamická geometria ponúka aj možnosť nastavenia istých vizuálnych vlastností, je možné definovať kocky ako nepriehľadné. Žiak si môže zvoliť rôzne stratégie skladania virtuálnych kociek, a z didaktického hľadiska je užitočné všimnúť si zvolené postupy. Ak pomineme náhodnosť v skladaní a nesystémovosť, v zásade sú možné tri riešiteľské stratégie. Prvý strategický postup spočíva v postupnom dopĺňaní pôvodnej Miškovej kocky typu $2 \times 2 \times 2$ o ďalšie kocky až po rozmer $3 \times 3 \times 3$, pričom každej pridanej kocke treba nastaviť atribút farebnosti, či priehľadnosti. Druhá stratégia je založená na postavení kocky $3 \times 3 \times 3$ po jednotlivých poschodiach (prípadne vertikálnych rezoch) od úplne prvej kocky až po poslednú, taktiež s nastavením priehľadnej, alebo farebnej vlastnosti každej kocky (obr. 8, obr. 9, obr. 10). Tretia stratégia je založená na metóde farbenia

kocky, t. j. žiak môže mať pripravenú bezfarebnú stavbu $3 \times 3 \times 3$ (alebo si ju sám zostrojí) a nastavovaním atribútu priehľadnosti pre každú malú kocku postupne stavbu „farbí“.



Obr. 9: Ukončená konštrukcia kocky.



Obr. 10: Jeden z pohľadov na kocku – verifikácia priehľadnosti.

Vďaka možnosti „zmeny stanoviska pozorovateľa“ v Cabri 3D je príkladanie kociek jednoduché a názorné. Zmeniť pohľad na náčrtu možno pridržaním pravého tlačidla myši a jej pohybom do požadovaného smeru. Táto prednosť umožňuje žiakovi po zostavení veľkej kocky overiť jej nepriehľadnosť a korigovať prípadné omyly vo svojich hypotézach. Taktiež sa jednoduchou zmenou pohľadu zistí celkový počet použitých nepriehľadných kociek, pričom konštrukciu netreba rušiť. Ak je riešiteľ v predstavách vyspelejší vie nepriehľadných kociek. Na pomoc menej vyspelému riešiteľovi môže poslúžiť nástroj „prehrávanie konštrukcie“.

Záver

Pri riešení stereometrických úloh vo všeobecnosti závisí výber metódy riešenia otáčaním kocky zistiť počet použitých úlohy od úrovne abstrakčného stupňa poznania jednotlivca. Kým na najnižšom stupni v abstraktno-gradáčnej štruktúre treba počítať

s tým, že pre dieťa je nutné teleso si ohmatať, pohrať sa s ním, u vyspelého riešiteľa (po abstrakčnom zdvihu) očakávame, že predstava o skladbe jednotlivých kociek bude prebiehať čisto myšlienkovou manipuláciou. Medzi uvedenými stupňami zrelosti riešiteľa stereometrických úloh je niekoľko úrovní, ktorých prekonanie je podmienkou úspešnosti. Domnievame sa, že **metóda virtuálnej priestorovej manipulácie** v špeciálnych programových prostrediach v kombinácii s ostatnými tradičnými a osvedčenými metódami môže poskytnúť dostatok skúseností a poznatkov potrebných na zvládnutie jednotlivých abstrakčných úrovní.

Literatúra

- (1) GROTHMANN, R.: Compass and Ruler. [cit. 12. dec. 2008]. URL: http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirke1/doc_en/index.html.
- (2) ŽIDEK, O.: 2007. *Manipulačné a virtuálne štúdium niektorých vlastností špeciálnych mnohostenov*. In: *Vyučovanie matematice z pohľadu kompetenci žaka a učiteľa 1. stupně základního vzdělávání*. Plzeň: Západočeská univerzita, s. 204-209, 2007, ISBN 978-80-7043-548-9.
- (3) VANÍČEK, J.: CABRI 3D – cesta do další dimenze? In: *Konferencia „Užití počítačů ve výuce.“* České Budějovice: 2005. URL: http://www.pf.jcu.cz/cabri/cabri3d/dalsi_dimenze.pdf.
- (4) VALLO, D: Riešenie stereometrických úloh v programe Cabri 3D. In: *Konferencia „Matematika včera, dnes a zajtra“*. Ružomberok: Pedagogická fakulta KU, str. 280-283, 2006. ISBN 80-8084-066-0.
- (5) VALLO, D: Možnosti Cabri 3D vo vyučovaní geometrie. In: *39. konferencia slovenských matematikov, Jasná pod Chopkom*. Žilina: Edis – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 47 s. ISBN 978-80-8070-772-9. URL: <http://www.konferenciajasna.sk/article/9/>.
- (6) ŽILKOVÁ, K.: WebMatika - školská matematika v prostredí IKT. Úloha o nepriehľadnej kocke. [cit. 12. dec. 2008]. URL: <http://www.webmatika.sk/Cabri3D/nepriehladna.kocka.html>.
- (7) PEDAGOGUERY SOFTWARE INC.: Poly Pro. [cit. 12. dec. 2008]. URL: <http://www.peda.com/polypro/>.
- (8) EXAM testing: súťaž MAKS6, šk. rok 2007-2008, 3. kolo, úloha 4. [cit. 12. oct. 2008]. URL: <http://www.maks.sk>.

PaedDr. Katarína Žilková, PhD.
Katedra matematiky a informatiky PdF
Univerzita Komenského v Bratislave
Račianska 59
813 34 Bratislava
Web: www.km.fedu.uniba.sk
E-mail: katarina@zilka.sk